

2つの円筒面 A, B (半径は各々 R, r) の交差曲線を求める。

円筒 A の軸を X 軸に置き、円筒 B の軸上で円筒 A の軸に一番近くなる点を Z 軸上に来るように配置しても、一般性は失われない。

このとき、円筒 B の軸は XY 平面と平行であり、円筒 B の軸の Y 軸方向からのずれの角度を α (反時計回り正) とし、2円筒の軸の距離を β (Z 軸向きを正) とする。

すなわち、次の円筒の交線を求める。

A : X 軸を軸とする半径 R の円筒

B : $Z = \beta$ 平面上で Y 軸方向から α だけ回転した直線を軸とする半径 r の円筒

B の上の点は、パラメータ θ, u を使って

$$P(\theta, u) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ u \\ r \sin \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

これが、円筒 A の上にあるから、

$$\begin{aligned} P_y^2 + P_z^2 &= (-r \cos \theta \sin \alpha + u \cos \alpha)^2 + (r \sin \theta + \beta)^2 = R^2 \\ u &= \frac{r \cos \theta \sin \alpha \pm \sqrt{R^2 - (r \sin \theta + \beta)^2}}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

交線上の点はパラメータ θ を使って次のように表される。

$$P(\theta) = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \alpha + \tan \alpha (r \cos \theta \sin \alpha \pm \sqrt{R^2 - (r \sin \theta + \beta)^2}) \\ \pm \sqrt{R^2 - (r \sin \theta + \beta)^2} \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$

$\alpha = 0, \beta = 0$ のとき 2円筒の軸は XY 平面上で直交していて

$$P(\theta) = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ \pm \sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \theta} \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$